Fracciones

1. Las fracciones y los números Racionales

Las fracciones se utilizan cotidianamente en contextos relacionados con la medida, el reparto o como forma de relacionar dos cantidades. Tenemos entonces por ejemplo "un medio", "tres cuartos", "la quinta parte de", "la centésima parte...",etc.

Son fracciones: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{100}$

Todas estas fracciones son menores que la unidad porque en cada una de ellas el numerador es menor que el denominador.

Existen también fracciones mayores que la unidad, por ejemplo:

$$\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{48}{5} = 9 + \frac{3}{5}$$

Las fracciones mayores que la unidad se pueden expresar también a través de lo que llamamos *número mixto*. Así las dos últimas fracciones se escribirían:

$$\frac{5}{2} = 2\,{}^{1}\!/_{2} \quad \text{y} \quad \frac{48}{5} = 9\,{}^{3}\!/_{5}$$

Podemos observar que cinco medios se puede escribir como un número Natural y una fracción menor que la unidad.

Entonces podríamos establecer, como expresan Cólera y Miguel de Guzmán[1], que **las fracciones complementan a los números Naturales, dando lugar entre todos, al conjunto de los números Racionales positivos.**[2]

- **Entonces, ¿los números Naturales no son fracciones?**

La respuesta a este interrogante, tan común entre los maestros, es que todo número Natural se puede representar como una fracción, por ejemplo, el número 8 puede ser representado, entre otras, por las fracciones $\frac{8}{1}; \frac{40}{5}; \frac{800}{100}; \ldots\ldots$

Obsérvese que todo número Natural puede ser expresado en forma de fracción y como lo planteamos anteriormente, todo número Natural es entonces un número Racional.
Ampliando esta idea, todo número Entero se puede expresar utilizando fracciones.
Coincidiendo con Cólera y de Guzmán, **"Todos los números Racionales se pueden expresar como fracciones, es decir, como cociente de dos números Enteros"**[3]

---

[1] Cólera, J; de Guzmán, M (1994)- " Matemática 1". Editorial Anaya. Madrid.
[2] Para obtener el conjunto de los números racionales tendríamos que considerar la unión entre las fracciones(positivas y negativas) y el conjunto de los números enteros (números naturales y sus simétricos con respecto a cero).
[3] Al hablar de cociente de enteros se entiende que la división entre ellos es posible, es decir, con divisor distinto de cero.

2. Fracciones y números Racionales ¿son sinónimos?

Los números Racionales admiten expresión fraccionaria, es por eso que usualmente se suele confundir el concepto de número Racional y el de fracción.

Sabemos que un número Racional puede expresarse mediante infinitas fracciones, así el racional "tres cuartos" puede representarse:
$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{60}{80}=\frac{9}{12}=...$

En otras palabras el conjunto de los números Racionales está formado por elementos únicos, es decir no repetidos, $\frac{3}{4}$ sería el representante canónico[4] de un número que admite infinitas representaciones.
Existe un único número "tres cuartos", el cual posee infinitas representaciones.

Si el numerador y el denominador de una fracción se pueden dividir o multiplicar por un mismo número distinto de cero, al hacerlo obtenemos una fracción equivalente a la dada.
Es así que se está dividiendo o multiplicando a la fracción por 1 y en consecuencia el resultado de dicha multiplicación o división es igual a dicha fracción.
Así por ejemplo $\frac{3}{4}\times\frac{2}{2}=\frac{6}{8}$ y como $\frac{2}{2}=1$, resulta entonces que $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$.
Obsérvese que entre la fracción obtenida $\left(\frac{6}{8}\right)$ y la dada $\left(\frac{3}{4}\right)$ se verifica que: 3 x 8 = 4 x 6.
Hemos obtenido dos fracciones iguales cuyas componentes son diferentes. Las llamaremos equivalentes porque representan el mismo número.

Son fracciones equivalentes aquellas que verifican la siguiente relación:
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow$ a x d = b x c. Ejemplo: $\frac{6}{8}=\frac{9}{12} \Leftrightarrow 6\times 12 = 9\times 8$

Si al simplificar dos fracciones se obtiene el mismo número Racional, estas son equivalentes.
Continuando con el ejemplo: $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ por lo tanto las fracciones $\frac{9}{12}$ y $\frac{6}{8}$ son equivalentes.
En este caso la fracción $\frac{3}{4}$ es la irreducible también llamada representante canónico del racional $\frac{3}{4}$.

Pensando en la enseñanza de las fracciones consideramos conveniente utilizar el signo de igual para relacionar dos fracciones equivalentes.

[4] Entendemos por representante canónico a la fracción irreducible.

3. Comparación de fracciones.

Para comparar fracciones de diferente denominador, es conveniente encontrar alguna relación de orden entre ellas. A modo de ejemplo al comparar $\frac{3}{4}$ *y* $\frac{5}{3}$ obsérvese que $\frac{3}{4}$ es menor que uno y que $\frac{5}{3}$ es una fracción mayor que la unidad, por lo tanto podemos asegurar directamente que $\frac{3}{4} < \frac{5}{3}$

$$\frac{3}{4} < 1 < \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{5}{3}$$

Este mismo razonamiento, empleado para comparar fracciones con la unidad, podemos utilizarlo para compararlas con otros números conocidos como por ejemplo $\frac{1}{2}$, 3, etc.

En la comparación de $\frac{7}{8}$ y $\frac{8}{9}$ se podría considerar que falta $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{9}$ respectivamente para completar la unidad. Sin embargo sabemos que $\frac{1}{8}$ es mayor que $\frac{1}{9}$ y por lo tanto $\frac{7}{8}$ es menor que $\frac{8}{9}$.

Los ejemplos anteriores hacen referencia a la búsqueda de relaciones entre las fracciones que estamos comparando, es decir que se buscan argumentos para poder establecer entre ellas una relación de orden.

Ante la necesidad de comparar dos fracciones de distinto denominador se puede apelar también a transformarlas en fracciones equivalentes de igual denominador, buscando un denominador común que debe ser múltiplo común de los denominadores iniciales. Si se visualiza rápidamente el mínimo común múltiplo de los denominadores el cálculo se torna más cómodo y por lo tanto su elección resulta conveniente.

Por ejemplo para comparar $\frac{3}{4}; \frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$ consideramos el 24, que es un múltiplo común de 4, 3 y 6, obteniendo así las siguientes fracciones:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{4} = \frac{18}{24} \\ \frac{2}{3} = \frac{16}{24} \\ \frac{5}{6} = \frac{20}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{16}{24} < \frac{18}{24} < \frac{20}{24} \text{ resulta entonces que } \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}\ .$$

Si observamos que 12 es múltiplo de 3, 4 y 6 tenemos que:

$\frac{8}{12} < \frac{9}{12} < \frac{10}{12}$ y llegaríamos a la misma relación entre las tres fracciones iniciales que queríamos comparar.

También se pueden comparar fracciones apelando a la igualdad entre fracciones, planteada anteriormente. Por ejemplo podemos notar que si $\frac{3}{4}$ fuera equivalente a $\frac{4}{5}$

debería cumplirse que el producto de 3 x 5 debería ser igual al producto de 4 x 4. Sin embargo 15 < 16 de donde $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$.

En resumen, si queremos comparar las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5}$ podríamos utilizar alguno de estos caminos:

A) $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ y $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$ y como $\frac{15}{20} < \frac{16}{20}$, podemos concluir que $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$

B) Si realizáramos el producto de medios por extremos, obtenemos:

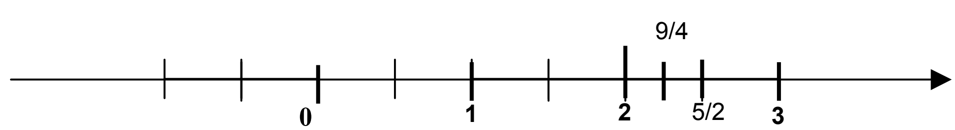
$\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5} \Rightarrow 3x5 < 4x4$. De donde $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$. Obsérvese que los numeradores de las fracciones equivalentes de denominador 20 halladas en A) son los productos obtenidos en B).

No siempre es necesario proceder de una misma forma para establecer la relación de orden entre fracciones. Es conveniente analizar en cada caso los números en juego y decidir el procedimiento más pertinente.

3. Representación en la recta

Los números Racionales pueden representarse en la recta numérica. Se puede establecer que a cada punto de la recta le corresponde un único número Racional y recíprocamente a cada número Racional le corresponde un único punto de la recta.

La recta numérica funciona como un soporte para poder solucionar situaciones de comparación de fracciones. Ubicando cada fracción en la recta y observando la posición se puede establecer el orden entre ellas. Ejemplo:



Para identificar $\frac{9}{4}$ sobre la recta numérica una manera posible sería encontrar el intervalo de números naturales al que pertenece. En este caso $2 < \frac{9}{4} < 3$. Podemos considerar 2 = $\frac{8}{4}$ y 3 = $\frac{12}{4}$. Necesitamos subdividir el intervalo de extremos 2 y 3 en cuatro partes iguales para ubicar al punto que representa $\frac{9}{4}$. Análogamente procederíamos con la fracción $\frac{5}{2}$, observando que podemos escribir $2 = \frac{4}{2}$ y $3 = \frac{6}{2}$ por lo tanto $\frac{5}{2}$ está comprendida entre 2 y 3; subdividiendo el intervalo en mitades ubicaríamos el punto correspondiente a $\frac{5}{2}$, obteniéndose así la relación: $\frac{9}{4} < \frac{5}{2}$

Asimismo la recta numérica permite visualizar que dado dos números Racionales siempre es posible encontrar otro comprendido entre los números dados. Esta propiedad es característica de los números racionales y se denomina ***Densidad.***

Por ejemplo ¿cómo podríamos hacer para encontrar un racional entre $\frac{5}{4}\, y\, \frac{6}{4}$?

Una estrategia sería hallar la semisuma o promedio entre dichos números.

$\frac{5}{4}+\frac{6}{4}=\frac{11}{4}$

$\frac{11}{4}\div 2=\frac{11}{8}$ es decir que hemos encontrado a $\frac{11}{8}$ tal que $\frac{5}{4}<\frac{11}{8}<\frac{6}{4}$

$\frac{11}{8}$ no es la única fracción comprendida entre $\frac{5}{4}\, y\, \frac{6}{4}$ pues repitiendo el procedimiento podríamos encontrar, por ejemplo, otra fracción entre $\frac{5}{4}$ y $\frac{11}{8}$.

Otra forma de encontrar fracciones comprendidas entre dos dadas es expresar dichas fracciones a través de fracciones equivalentes del mismo denominador tales que las nuevas expresiones permitan intercalar otras:

$\frac{5}{4}$ $\qquad$ $\frac{6}{4}$

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

$\frac{20}{16} < \frac{21}{16} < \frac{24}{16}$ Volvemos a encontrar una fracción comprendida entre dos.

En definitiva hemos encontrado otra fracción $\frac{21}{16}$ que verifica: $\frac{5}{4}<\frac{21}{16}<\frac{6}{4}$

Pero también, $\frac{5}{4}=\frac{15}{12}$ y $\frac{6}{4}=\frac{18}{12}$ y podemos ver que entre ellas podemos ubicar las fracciones $\frac{16}{12}$ y $\frac{17}{12}$.

Observando los ejemplos anteriores, ¿cómo obtendría fácilmente once fracciones comprendidas entre $\frac{5}{4}\, y\, \frac{6}{4}$?

4. Expresión decimal de un número racional

Como todo número racional puede escribirse como fracción, admite también una representación decimal, que es la que se obtiene al dividir el numerador entre el denominador. Por ejemplo $\frac{1}{2}$ tiene como expresión decimal 0,5 y $\frac{1}{3} = 0,\widehat{3}$. Esto da lugar a dos tipos de expresiones decimales, las de período cero y las de período diferente de cero.

Por ejemplo $\frac{1}{2}=0,5\widehat{0}$ representa una expresión decimal de período 0. Obsérvese que el período es 0 pues después de la cifra 5 siguen infinitos ceros.

$\frac{1}{3} = 0,\widehat{3}$ representa una expresión decimal de período diferente de 0. El período es 3.

Tomemos otro caso, busquemos la expresión decimal de $\frac{1}{7}$. Al dividir uno por siete se obtiene $0,\overline{142857}$ donde el período es 142857.
Siempre que el período sea distinto de cero estará formado por un número finito de cifras diferentes.[5]

Podríamos preguntarnos **¿si toda expresión decimal es un número Racional?**
Existen expresiones decimales no periódicas que no se pueden expresar en forma de fracción. Por ejemplo podemos construir el número 97,18312917..... donde las cifras decimales no se repiten nunca de la misma manera, es decir no hay una ley de formación. Así se construye un número que no es posible representarlo con una fracción porque no es periódico, por lo tanto no es un número racional. Estos números se llaman irracionales y serán los que completen la recta numérica.
Uno de los irracionales más "populares" y que hace su entrada en la escuela es el número pi. También son irracionales los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc.

4. Operaciones

ADICIÓN DE FRACCIONES DE DISTINTO DENOMINADOR

Para sumar dos fracciones de distinto denominador tendremos que transformarlas en otras equivalentes con el mismo denominador.

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{6}=\frac{9}{12}+\frac{14}{12}=\frac{23}{12}$$

La adición de números Racionales cumplen las mismas propiedades que la adición de números Enteros.

- *¿Cuáles son dichas propiedades?*

Conmutativa: $\frac{3}{4}+\frac{7}{6}=\frac{7}{6}+\frac{3}{4}$

Asociativa: $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{6}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\left(\frac{7}{6}+\frac{1}{2}\right)$

Existencia de Neutro: $\frac{3}{4}+0=0+\frac{3}{4}$

Existencia de opuesto: $-\frac{3}{4}$ es el opuesto de $\frac{3}{4}$ porque $\frac{3}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)=0$

La propiedad de existencia del opuesto de todo número Racional permite que la sustracción se realice sin problemas dentro del conjunto de los números Racionales. Esta propiedad es "heredada" desde la adición del conjunto de los enteros donde siempre existe opuesto, salvo el 0, que no lo posee. Es decir que siempre es posible realizar la sustracción de dos números Enteros: 4 - 7 = 4+(-7)= -3.
De la misma manera, esta propiedad garantiza que siempre es posible realizar la sustracción entre dos números Racionales, pues existe el opuesto de todo racional salvo para el cero.

[5] Cuando dividimos un entero n por otro m, los restos posibles de dicha división están entre 0 y (m – 1) por lo cual existen exactamente m posibilidades para dichos restos. En nuestro último ejemplo n = 1 y m = 7 por lo tanto hay sólo 6 restos diferentes posibles, en este caso ellos son: 3, 2, 6, 4, 5, 1. De continuar con la división, estos restos, se repiten, obteniéndose el período.

MULTIPLICACIÓN

El producto de dos fracciones puede obtenerse de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d} \qquad \frac{3}{4}\times\frac{7}{6}=\frac{3\times 7}{4\times 6}=\frac{21}{24}$$

La multiplicación de fracciones admite las mismas propiedades que la adición de fracciones: conmutativa, asociativa, existencia de neutro (en este caso es el uno) y agrega una nueva propiedad: la existencia del inverso. Su enunciado se puede expresar así: todo número Racional $\frac{a}{b}$, salvo el 0, tiene inverso $\frac{b}{a}$, tal que $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$

Esta propiedad permite que la división entre números Racionales siempre sea posible, en consecuencia siempre es posible la división de fracciones. Recordamos que todo número Racional se puede expresar en forma fraccionaria.

$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$ es decir que el cociente de dos fracciones es el producto de "la primera" fracción por la inversa de "la segunda".

Ejemplo:

$\frac{3}{4}\div\frac{7}{6}=\frac{3}{4}\times\frac{6}{7}=\frac{18}{28}$

- *¿ $\frac{12}{28}$ podría ser el inverso de $\frac{7}{3}$?*

Una de las forma de saberlo es buscar el producto de $\frac{12}{28}\times\frac{7}{3}=\frac{84}{84}=1$

Obtuvimos el neutro de la multiplicación por lo tanto dichas fracciones son inversas.

Otra manera sería apelar a la equivalencia de fracciones. Al simplificar $\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$ por lo tanto $\frac{3}{7}$ es el inverso de $\frac{7}{3}$.

De lo anterior se deduce que el inverso de un racional no tiene solamente una expresión. Recordamos que cada Racional admite infinitas expresiones fraccionarias que lo representan.

Existe otra propiedad que relaciona la multiplicación con la adición de Racionales.

Es la propiedad distributiva de la multiplicación ante la adición:

$$\frac{5}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{6}\right)=\frac{5}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\times\frac{7}{6}$$

5. Desde el conjunto de los números Naturales hasta el conjunto de los números Racionales

Sabemos que las operaciones posibles que se pueden realizar en el conjunto de los números Naturales son la adición y la multiplicación, porque la sustracción y la división son posibles pero con restricciones. Para la sustracción es necesario que el minuendo sea mayor que el sustraendo, de lo contrario el número resultante no es un elemento del conjunto de los números Naturales. En la división el dividendo debe ser múltiplo del divisor. Por ejemplo, en la división 10: 3, 10 no es múltiplo de 3, porque no existe un número Natural tal que multiplicado por 3 de como resultado 10.

Al "ampliar" el conjunto de los números Naturales[6] y obtener el conjunto de los números Enteros se agrega, sin restricciones, una tercera operación posible en este nuevo conjunto, la sustracción.
El conjunto de los números Enteros (Z) lo obtenemos realizando la unión del conjunto de los números Naturales con sus simétricos respecto del 0.
Es decir: $Z = N \cup Z^-$ o bien $Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$
Tenemos pues que en el conjunto de los números Enteros las únicas operaciones posibles son la adición, la multiplicación y la sustracción. Aún no es posible, en dicho conjunto, realizar siempre la división, porque por ejemplo, no existe el cociente de $12 \div 5$, pues no existe un número Entero tal que multiplicado por 5 de como resultado 12.
Es por eso que surge la necesidad de "ampliar" ahora el conjunto de los Enteros para que esta dificultad sea salvada y se pueda definir la división como una operación.
Entonces la adición, la multiplicación, la sustracción, la división son operaciones en este nuevo conjunto: el conjunto de los números Racionales.
Esta idea de ampliación de conjuntos nos permite visualizar la relación de inclusión que existe entre los conjuntos numéricos Naturales (N), Enteros (Z) y Racionales (Q). En símbolos la podemos expresar: $N \subset Z \subset Q$.
Es decir que todo número Natural es un número Entero, que todo Entero es un Racional y por consecuencia todo número Natural también es un número Racional.
De otra manera todo número Natural y Entero se puede escribir como una fracción.

Los siguientes esquemas pretenden ayudar a observar la relación de inclusión entre los conjuntos de números Naturales, Enteros y Racionales.

Ejemplo	N	Z	Q
16	x	x	x
-6		x	x
$\frac{1}{2}$			x
$\frac{12}{4}$	x	x	x
4,0	x	x	x

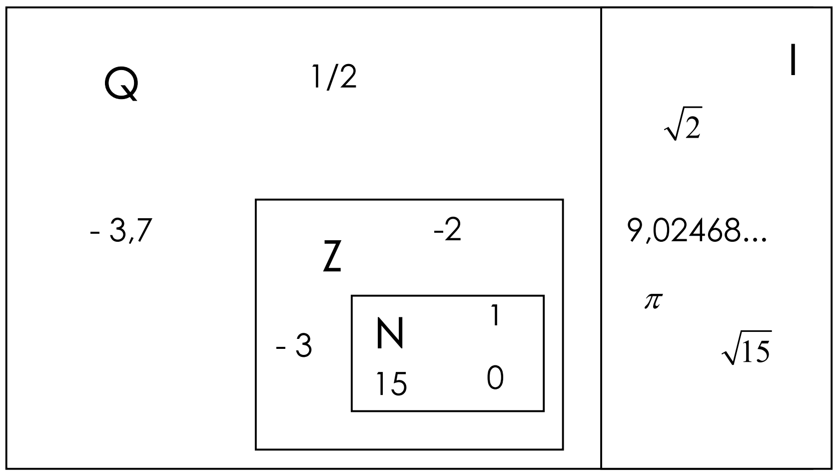
Por ejemplo, la tabla nos informa que "dieciséis pertenece al conjunto de los números Naturales, al conjunto de los números Enteros y al de los Racionales"

En símbolos: $16 \in N$; $16 \in Z$ y $16 \in Q$

De igual manera se interpreta el resto de las filas:

$-6 \notin N$; $-6 \in Z$ y $-6 \in Q$

[6] Consideramos en todo momento al "0" como elemento del conjunto de los números Naturales.



El diagrama muestra la inclusión del conjunto de los números Naturales en el conjunto de números Enteros y la de los números Enteros en el conjunto de los Racionales. Obsérvese que el conjunto de los Racionales y de los Irracionales son disjuntos, es decir, no tienen elementos en común. Recordar que en el desarrollo nombramos los números Irracionales y dimos una pauta de una posible formación. La unión del conjunto de los Racionales con el conjunto de los números Irracionales determina el conjunto de los números Reales.